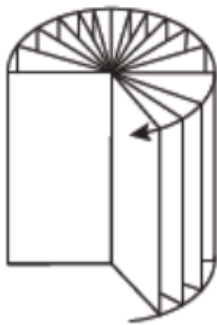


هندسه تحلیلی و مقاطع مخروطی

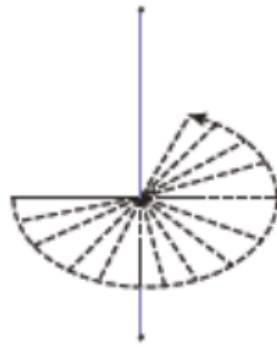
تفکر تجسمی:

دوران:

از دوران یک پاره خط حول یک محور، یک سطح ایجاد می شود.



از دوران پاره خط موازی با محور حول آن، یک سطح استوانه‌ای تو خالی ایجاد می شود.



از دوران پاره خط حول محوری که بر آن عمود است، یک سطح دایره‌ای تو پر ایجاد می شود. اگر محور و پاره خط نقطه‌ی مشترکی داشته باشند، دایره کامل است.



از دوران یک پاره خط مایل با محور حول آن یک سطح مخروطی تو خالی ایجاد می شود.

❖ از دوران یک سطح حول یک محور حجم ایجاد می شود:

۱. از دوران دایره حول قطر آن کره ایجاد می شود. حجم کره $\frac{4}{3}\pi R^3$ و سطح آن $4\pi R^2$ است.

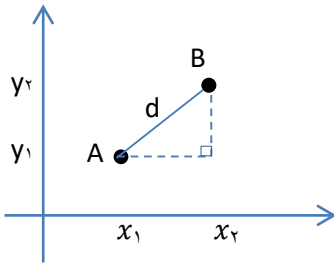
۲. از دوران مستطیل یا مربع حول یک ضلع، استوانه ایجاد می شود. حجم استوانه‌ای به ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی R برابر $\pi R^2 h$ است. سطح جانبی آن نیز $2\pi R h$ است.

۳. از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع قائم، مخروط ایجاد می شود. حجم مخروط به ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی R برابر است با $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

❖ سوالات ۱ تا ۵ حتماً حل شوند.

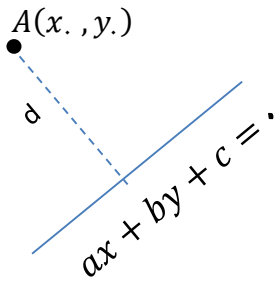
یادآوری:

فاصله دو نقطه



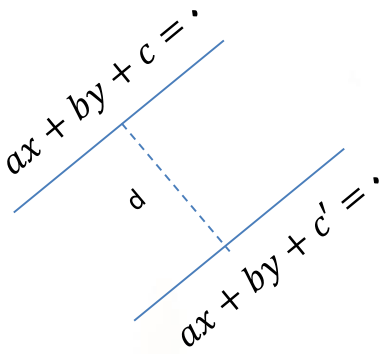
طبق فیثاغورس: $\overline{AB} = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

فاصله نقطه از خط: فاصله نقطه $A(x, y)$ از خط $ax + by + c = 0$



$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله دو خط موازی

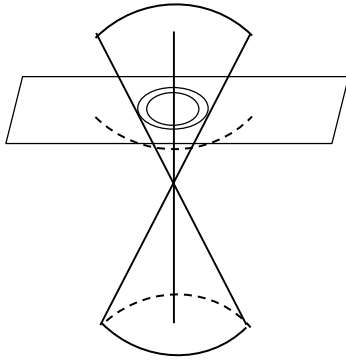


$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

❖ دقت شود که ضرایب X و Y در دو خط برابر باشند.



در این فصل تجسم اشکال هندسی زیادی حائز اهمیت است تا به جای حفظ کردن فرمول‌های اضافی از تجسم اشکال کمک بگیریم.



دایره ← صفحه‌ی عمود بر محور مخروط

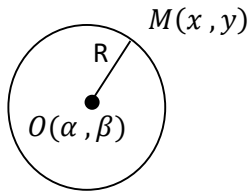
بیضی ← صفحه‌ی مایل بر محور مخروط

سه‌می ← صفحه‌ی موازی با مولد مخروط

هذلولی ← صفحه‌ی موازی محور مخروط

دایره

مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه‌ی ثابت به یک فاصله‌اند.



$$OM = R \rightarrow \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = R$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow \begin{cases} \text{مرکز } (\alpha, \beta) \\ \text{شعاع } R \end{cases}$$

مثال: $4(x - 1)^2 + (2y + 6)^2 = 12$

❖ باید ضرایب x و y یکی باشند تا ظاهر معادله استاندارد رعایت شود، این‌جا نیز همین است.

$$\rightarrow 4(x - 1)^2 + 4(y + 3)^2 = 12 \rightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 3 \rightarrow \begin{cases} \text{مرکز } (1, -3) \\ \text{شعاع } \sqrt{3} \end{cases}$$

❖ رابطه‌ی استاندارد را گسترش می‌دهیم

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$$

معادله گسترده دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

❖ معادله‌ی گسترده‌ی هر مقطع مخروطی در حالت گسترده

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\begin{cases} \text{مشتق نسبت به } x \rightarrow 2x + a = 0 \rightarrow x = -\frac{a}{2} \\ \text{مشتق نسبت به } y \rightarrow 2y + b = 0 \rightarrow y = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

مثال: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \\ 2y + 8 = 0 \rightarrow y = -4 \end{cases}$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

❖ محاسبه‌ی شعاع دایره (در استفاده از این رابطه باید ضریب x^2 و y^2 عدد یک باشد. اگر نبود باید خودمان با تقسیم به ضرایب x^2 و y^2 این کار را انجام دهیم).

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{16 + 64 + 4} = \frac{1}{4} \sqrt{84}$$

مثال بالایی

تست ۱: هر خط قائم بر دایره از نقطه‌ی $(-2, 1)$ می‌گذرد. این دایره بر خطی به معادله‌ی $y = x - 1$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟ (س ت ۸۷)

- الف) ۲ ب) $2\sqrt{2}$ ج) ۳ د) $3\sqrt{2}$

❖ (۱) هر خط قائم بر دایره یک قطر دایره است و تمامی قطرهای آن از مرکز می‌گذرند.
 (۲) واضح است فاصله‌ی خط مماس بر دایره از مرکز برابر شعاع دایره است پس اسم مماس اومد دنبال مرکز بگرد.

تست ۲: به ازای کدام مقدار a ، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ و خط به معادله‌ی $3x + 2y = a$ در نقطه‌ی تلاقی آن‌ها، 90° درجه است؟ (س ر ۹۶)

- الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵

تست ۳: دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x - y = 1$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (س ت ۹۵)

- الف) ۱ و ۳ ب) ۱ و ۴ ج) ۲ و ۳ د) ۱/۵ و ۴

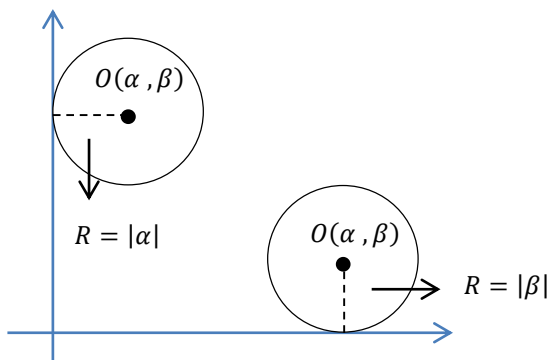


تست ۴: نقطه‌ی $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ و تری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟ (س ت خ ۹۸)

- الف) $3, -5$ ب) $2, -4$ ج) $-1 \pm \sqrt{2}$ د) $-1 \pm \sqrt{3}$

❖ دایره‌های مماس بر محور X یا Y

تجسم کن



تست ۵: معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $(-1, 3)$ و مماس بر محور Y ها کدام است؟

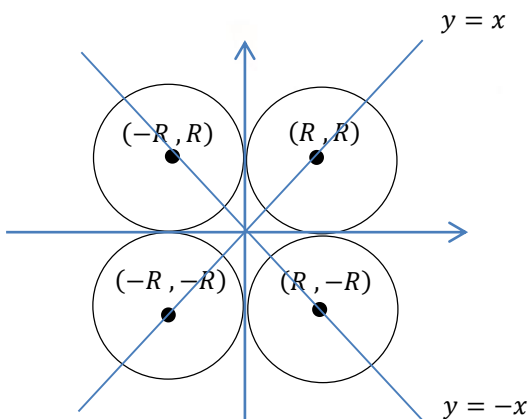
- الف) $x^2 + y^2 - x + 3y + 9 = 0$ ب) $x^2 + y^2 - x + 3y + 1 = 0$
 ج) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$ د) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$

❖ دایره بر هر دو محور مماس باشد

I. مختصات نقطه‌ی دلخواهی از دایره داده می‌شود که ناحیه را مشخص می‌کند. ← با صدق نقطه در دایره R به دست می‌آید.

II. معادله‌ی یک قطر دلخواه از دایره داده می‌شود.

← ناحیه را خود سؤال مشخص می‌کند در این صورت با داشتن قطر دیگر که همان نیم‌ساز است مرکز محاسبه می‌شود.



تست ۶: دایره‌ای از نقطه‌ی $(-1, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مماس است، قطر دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟ (س ت ۹۱، س ت ۹۰)

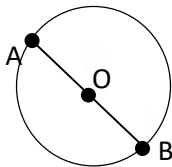
س ر ۹۵

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۵ د) ۱۲

تست ۷: دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ گذشته و بر خط $y = 1$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟ (س ر)

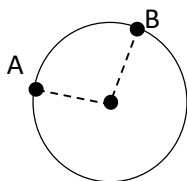
الف) $\frac{3}{2}$ ب) $\frac{5}{2}$ ج) ۳ د) $\sqrt{5}$

- عمودمنصف هر وتری از مرکز می‌گذرد پس طول مرکز صفر است.
- اگر فرض برای محاسبه‌ی مرکز نداشتی (مثل تقاطع قطرها، مماس بر محورها و ...) در این حالت شعاع را از دو روش محاسبه کن و مساوی هم قرار بده.



$$OA = OB = R$$

❖ دو سر قطر را داریم



$$OA = OB = R$$

❖ دو نقطه‌ی دلخواه داریم

❖ در این جا مرکز به صورت پارامتری نوشته می‌شود

به‌عنوان مثال روی خط $y = 3x$ قرار دارد پس $O(\alpha, 3\alpha)$

تست ۸: دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ می‌باشد. شعاع این دایره کدام است؟ (س ت خ ۹۰)

- الف) $\sqrt{2}$ ب) ۲ ج) $\sqrt{5}$ د) ۳

- ❖ نقاط روی محیط دایره $\rightarrow = 0$ معادله‌ی دایره
- ❖ نقاط بیرون دایره $\rightarrow > 0$ معادله‌ی دایره
- ❖ نقاط داخل دایره $\rightarrow < 0$ معادله‌ی دایره

تست ۹: نامعادله‌ی $x^2 + 4x + y^2 - 12 \leq 0$ کدام نقاط را مشخص می‌کند؟ (کتاب درسی)

- الف) درون و روی محیط دایره به مرکز $(-2, 0)$ و شعاع ۴ ب) درون و روی محیط دایره به مرکز $(-4, 0)$ و شعاع ۴
 ج) درون و روی محیط دایره به مرکز $(-2, 0)$ و شعاع ۸ د) درون و روی محیط دایره به مرکز $(-4, 0)$ و شعاع ۸

تست ۱۰: به ازای کدام مقدار a منحنی به معادله‌ی $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟ (س ت ۸۵)

- الف) -۳ ب) ± 3 ج) \emptyset د) ۳



تست ۱۱: به ازای کدام مقدار a ، دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خطی به معادله $x + 3y = 0$ مماس است؟ (س ت ۸۵)

- (الف) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{5}{2}$ (ج) ۳ (د) ۵

تست ۱۲: شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(2, 1)$ و $(-2, 4)$ و $(0, 0)$ می‌گذرد کدام است؟ (کتاب درسی، س ت ۸۲، س ت ۹۲)

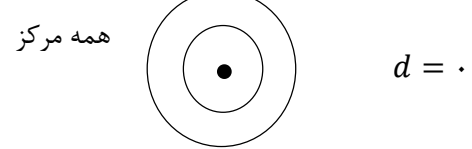
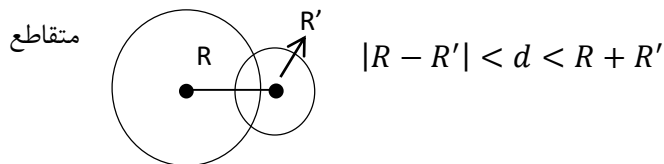
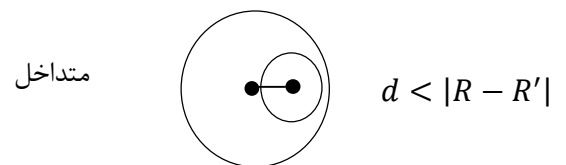
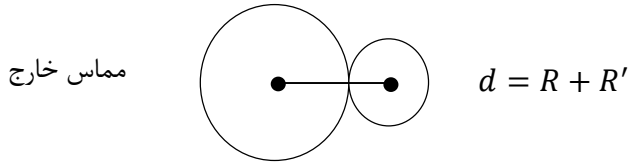
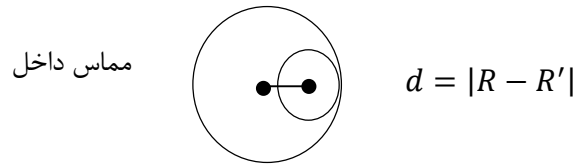
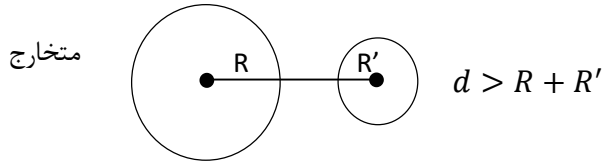
- (الف) ۲ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) ۳ (د) $\frac{3}{5}$

تست ۱۳: فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x, y)$ از نقطه‌ی $A(3, 6)$ دو برابر فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟ (س ت ۹۷)

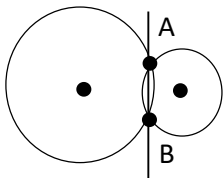
- (الف) $2\sqrt{3}$ (ب) $2\sqrt{5}$ (ج) $4\sqrt{3}$ (د) $4\sqrt{5}$



وضعیت دو دایره نسبت به هم



❖ در حالت متقاطع وتر مشترک دو دایره، وتری که از نقاط تقاطع دو دایره عبور می کند برای به دست آوردن وتر مشترک دو دایره را مساوی یکدیگر قرار می دهیم.



در حالت هم مرکز طول وتری که از دایره بزرگ تر به دایره کوچک تر مماس می شود را بیابید؟

$$x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$$

حالا اگر طول تقاطع ها را خواستی خط بالا را با یکی از دایره ها قطع می دهیم.

تست ۱۴: به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$ مماس داخل اند؟

(س ت ۸۶)

- (الف) -۲ (ب) -۴ (ج) -۳ (د) -۵



❖ وضعیت دو دایره نسبت به هم را با توجه به OO' و RR' مقایسه می‌کنیم.

تست ۱۵: دایره‌ی C بر دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره‌ی C از نقطه‌ی

$(8, 7)$ می‌گذرد، شعاع دایره‌ی C کدام است؟ (س رخ ۹۶)

- الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹

تست ۱۶: معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 14$ کدام

است؟ (کتاب درسی)

- الف) $5x + 7y = 7$ ب) $5x + 7y + 7 = 0$ ج) $x + 7y = 7$ د) $x + 7y + 7 = 0$

تست ۱۷: وتر مشترک دایره‌ی C با دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 4x = 6$ منطبق بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول است. اگر دایره‌ی C از

نقطه‌ی $(-1, 4)$ بگذرد، معادله‌ی آن کدام است؟ (س ر ۹۸ قدیم)

- الف) $x^2 + y^2 - y + 3x = 6$ ب) $x^2 + y^2 + 2y - x = 6$

- ج) $x^2 + y^2 - 2y + x = 6$ د) $x^2 + y^2 - 3y - x = 6$



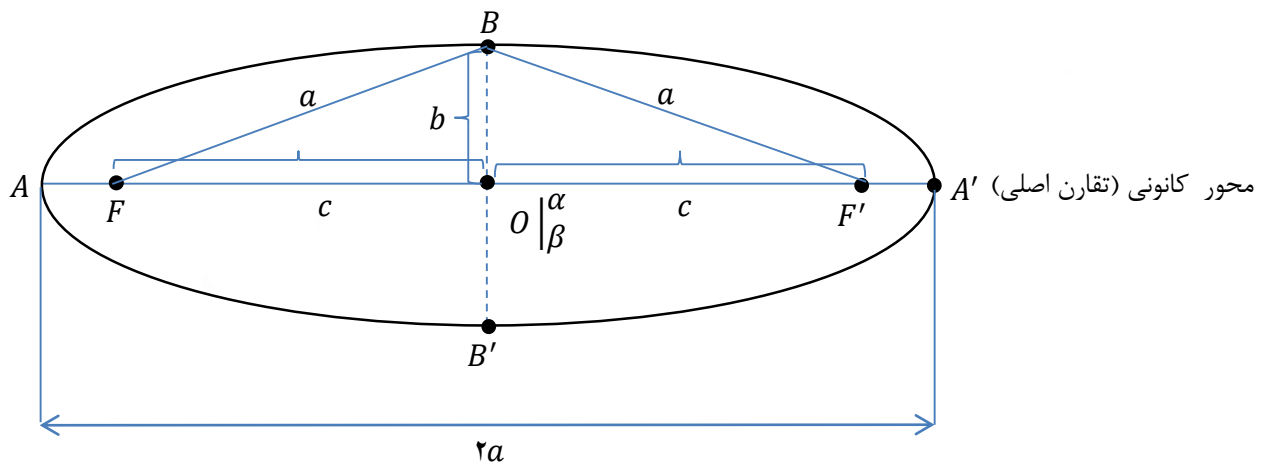
تست ۱۸: وتر مشترک دایره به معادله $x^2 + y^2 = 17$ با دایره C گذرا بر نقطه $(-1, 6)$ بر خط به معادله $2x - y = 3$ منطبق است. شعاع دایره C ، کدام است؟ (س رخ ۹۸ قدیم)

- الف) ۳ ب) $2\sqrt{2}$ ج) $2\sqrt{3}$ د) ۴

➤ سوالات ۱۶ تا ۲۵ حتماً حل شود.

بیضی

مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلش از دو نقطه ثابت F و F' به نام کانون مقدار ثابت $2a$ است
 محور ناکانونی (فرعی) $x = a$



O مرکز A و A' رأس کانونی و فاصله AA' قطر بزرگ بیضی است $2a =$

← اگر حداقل ۲ نقطه از ۵ نقطه A و A' ، F و F' و O هم‌عرض باشند، بیضی افقی است و اگر حداقل ۲ نقطه از ۵ نقطه هم‌طول باشند، بیضی عمودی است.

← BB' قطر کوچک $2b =$

حرکت به راست و چپ (افقی) ← عرض ثابت، طول تغییر می‌کند.

حرکت به بالا و پایین (عمودی) ← طول ثابت، عرض تغییر می‌کند.

رابطه a و b و c ← $a^2 = b^2 + c^2$



خروج از مرکز

$$e = \frac{c}{a} \xrightarrow{a > c} 0 < e < 1$$

هرچه بیضی چاق تر باشد e کوچک تره

$$e = \frac{c}{a} \xrightarrow{c = \sqrt{a^2 - b^2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

هرچه بیضی لاغرتر باشد e بزرگتره

$$\rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{\text{قطر کوچک}}{\text{قطر بزرگ}}\right)^2}$$

تست ۱۹: مجموع فواصل نقطه‌ی P روی بیضی از دو نقطه‌ی ثابت M و N به طول‌های $3-$ و 4 روی محور X ها برابر 9 است. اندازه‌ی قطر کوچک این بیضی کدام است؟

(د) $\frac{\sqrt{34}}{2}$

(ج) $\frac{\sqrt{32}}{2}$

(ب) $\sqrt{34}$

(الف) $\sqrt{32}$

تست ۲۰: بیضی به کانون‌های $(1, -1)$ و $(1, 1)$ و خروج از مرکز e مفروض است. به ازای کدام مقدار e بیضی بر محور Y ها مماس می‌شود؟

(د) $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(ج) $e = \frac{1}{3}$

(ب) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(الف) $e = \frac{1}{2}$

تست ۲۱: نقاط F_1 و F_2 کانون‌های یک بیضی هستند. اگر نقطه‌ی M روی این بیضی واقع باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

(د) $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{3}}{3}$

(ج) $\frac{\sqrt{10} - 1}{3}$

(ب) $\frac{\sqrt{10} - 2}{3}$

(الف) $\frac{\sqrt{10} - 3}{3}$



تست ۲۲: در یک بیضی به کانون‌های $(-۱, ۲)$ و $(۷, ۲)$ اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟ (س ت ۹۸)

الف) $۰/۶$ ب) $۰/۶۴$ ج) $۰/۷۵$ د) $۰/۸$

➤ سوالات ۶ تا ۱۵ حتماً حل شود.

